ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1998

MATHÉMATIQUES : ÉPREUVE B

FILIÈRE PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

DURÉE : 2 heures 30.

Problème 1

Soit, pour n entier naturel, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

1°_ Prouver, pour tout n entier naturel : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2°_ Pour tout n entier naturel, prouver : $1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$.

3°_ Pour tout entier naturel n, prouver : $(n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$.

4°_ Montrer que la suite $\left(\sqrt{n}\, I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

5°_ Prouver, pour tout réel u et tout entier naturel n : $u \geq -n \Rightarrow \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \leq e^u$.

6°_ Prouver, pour tout entier naturel n : $\forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right], \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.

7°_ Pour n entier supérieur ou égal à 2, déduire de la question 6° un encadrement de l'intégrale : $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.

8°_ Retrouver la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Problème 2

Soit n un entier naturel non nul, $E=\mathbb{C}^n$, B la base canonique de E, on note $<\ ,\ >$ le produit scalaire canonique de E (i.e. celui qui rend la base B orthonormale).

Si $u \in L(E)$, on note u* l'unique élément de $L(E)$ tel que $Mat_B(u^*) = {}^t\overline{(Mat_B(u))}$ et on dit que u est normal si et seulement si uou*=u*ou.

1°_ Soit $(u,v) \in L^2(E)$, montrer : $v=u^* \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2, < v(x), y >=< x, u(y) >$.

2°_ Soit $u \in L(E)$, montrer que si u est normal alors Ker(u)=Ker(u*).
(On pourra calculer <u*(x),u*(x)>)

3°_ Pour $u \in L(E)$, montrer que si u est normal alors $Im(u)^{\perp} = Ker(u)$.

4°_ On note e l'application « identité de E ». Pour u élément de $L(E)$, montrer que si u est normal alors :
$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $Ker(u - \lambda e)^{\perp}$ est stable par u.

5°_ Soit $u \in L(E)$, montrer que si u est normal et si F est un sous espace vectoriel de E propre pour u alors la restriction de u à $F^{\perp}$ noté $u_{|F^{\perp}}$ est normale.

6°_ Soit $u \in L(E)$, montrer : u est normal si et seulement si E possède une base orthonormale de vecteurs propres de u.

Problème 3

Soit $g \in C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $T_\alpha(g)$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$, qui a x associe $T_\alpha(g)(x) = \int_0^x g(t)e^{\alpha t}dt$.

1°_ Soit $g \in C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, résoudre l'équation (E_α) : $y'+\alpha y = g(x)$.
(On note S_α l'ensemble des solutions de (E_α) et on exprimera les solutions de (E_α) en fonction de $T_\alpha(g)$).

2°_ On suppose : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $Re(\alpha) > 0$.
Montrer : $\forall h \in S_\alpha$, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$. (On pourra admettre ce résultat)

3°_ Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ telle que : $\exists \alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0$ et $\lim_{x \to +\infty} (f'(x)+\alpha f(x)) = 0$.
Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4°_ Soit $g \in C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, r_1 et r_2 les solutions de $z^2+\alpha z+\beta = 0$.
On note $(E_{\alpha,\beta})$ l'équation : $y''+\alpha y'+\beta y = g(x)$.
On note $S_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des solutions de $(E_{\alpha,\beta})$.

a) On suppose : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $Re(r_1) < 0$.
Montrer : $\forall h \in S_{\alpha,\beta}$, $\lim_{x \to +\infty} (h'(x) - r_2 h(x)) = 0$.

b) On suppose : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $Re(r_1) < 0$ et $Re(r_2) < 0$.
Montrer : $\forall h \in S_{\alpha,\beta}$, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

5°_ Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ telle que : $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, $\lim_{x \to +\infty} (f''(x)+\alpha f'(x)+\beta f(x)) = 0$.
Où les solutions r_1 et r_2 de l'équation $z^2+\alpha z+\beta = 0$ vérifient : $Re(r_1) < 0$ et $Re(r_2) < 0$.
Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.